Vorlesung (3), 13.5.2022

[N-Körperproblem in rot. Koordinaten:

$$m_j \ddot{z}_j + 2i m_j \omega \cdot \dot{z}_j + m_j \omega^2 \cdot z_j = 2 D_{\bar{z}_j} V(z)$$

Gleichgewichtslagen sind Zentralkonfigurationen (ZK) $z = (z_1, \dots, z_N) \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$:

$$m_j \omega^2 \cdot z_j = 2 D_{\bar{z}_j} V(z), \quad j = 1, \dots, N.$$

$$V : Q \longrightarrow (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{C}$$

$$V(z) = -\sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} ,$$

$$R : Q \longrightarrow (0, \infty) \subseteq \mathbb{C} ;$$

$$R(z) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{j=1}^{N} m_j |z_j|^2 ,$$

$$W : Q \longrightarrow (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{C} ,$$

$$W(z) := V(z) - R(z) ,$$

$$G : \Omega \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}, \quad \Omega := Q \times \mathbb{C}^N,$$

$$G(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\dot{z}_j|^2 + W(z)$$

Gesamtenergie. G ist 1. Integral.

Proposition. Die Zentralkonfigurationen sind genau die kritischen Punkte der potentiellen Energie $W : Q \to (-\infty, 0)$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass $z \in Q$ genau dann ZF ist, also

$$D_{\bar z_j} V(z) = \frac{1}{2} m_j \omega^2 z_j \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

erfüllt, wenn

$$D_{z_j} W(z) = D_{\bar z_j} W(z) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

Da W reell-wertig ist, $W = \overline{W}$, gilt:

$$D_{z_j} W(z) = \overline{D_{\bar z_j} \overline{W}(z)} = \overline{D_{\bar z_j} W(z)} \, ,$$

und für $D_{\bar{z}_j} W(z)$ dürfen wir so rechnen, als wären z_j und $\bar{z}_j$ unabhängige Koordinaten:

$$D_{\bar{z}_j} W(z) = D_{\bar{z}_j} V(z) - D_{\bar{z}_j}\left(\frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot z_k \cdot \bar{z}_k\right)$$

$$= D_{\bar{z}_j} V(z) - \frac{1}{2}\,\omega^2 m_j z_j .$$

<u>Kommentar</u>. (a) Das öffnet nun das Tor für einen Existenzbeweis für Zentralkonfigurationen, denn es

wurde z.B. reichen zu zeigen, dass

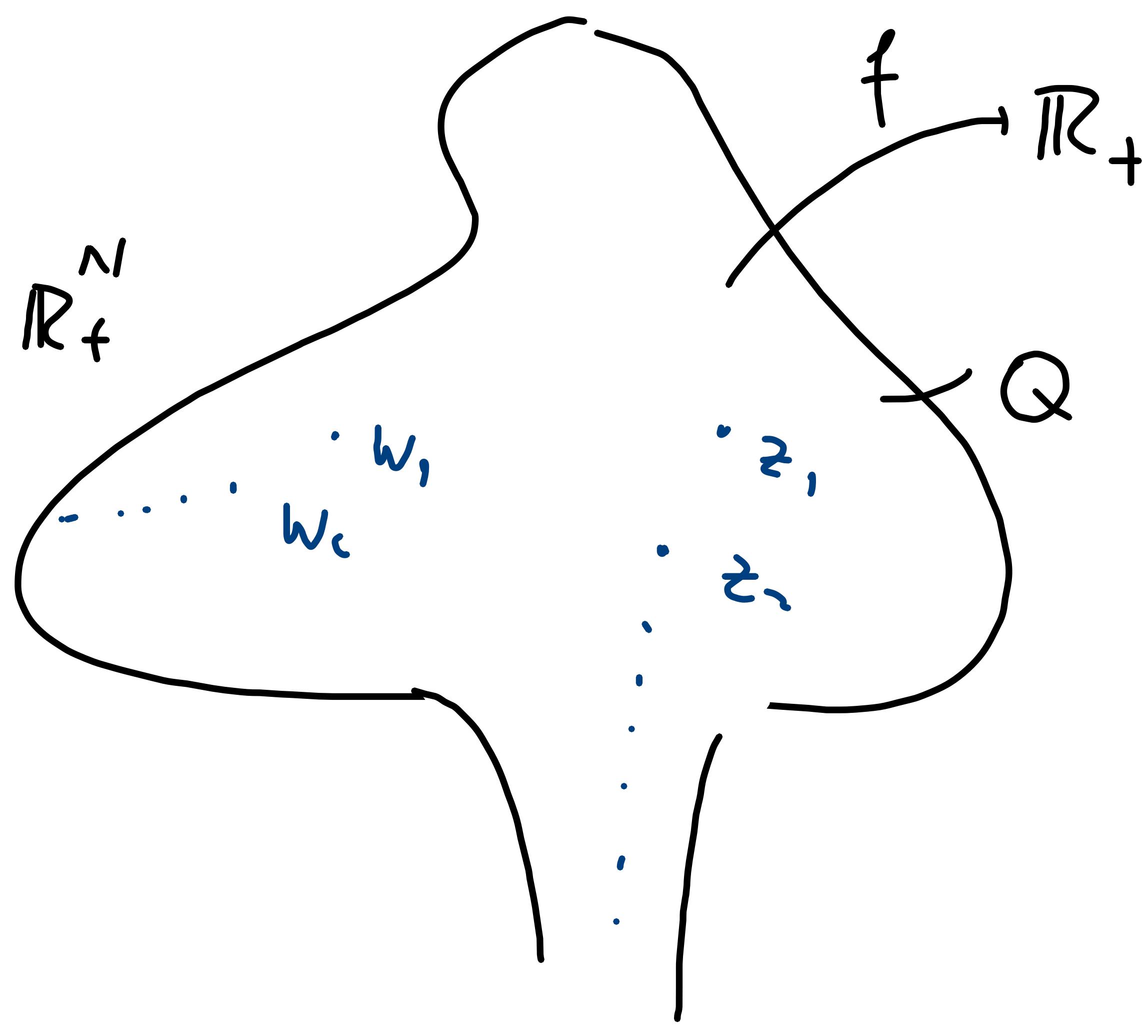
$$\mathcal{U} := -W : Q \longrightarrow (0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathcal{U}(z) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{j=1}^{N} m_j |z_j|^2 + \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|}$$

ihr Infimum annimmt.

(b) Man nennt eine (stetige) Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *eigentlich*, wenn für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}_+$ auch

$f^{-1}(K) \subseteq G$ kompakt ist. Gleich bedeutend ist, dass für jede Folge in G ohne Häufungspunkte (anschaulich eine Folge, die zum Rand des Def.-gebietes oder betragsmäßig nach ∞ strebt, $f(z_\nu) \to \infty$.)

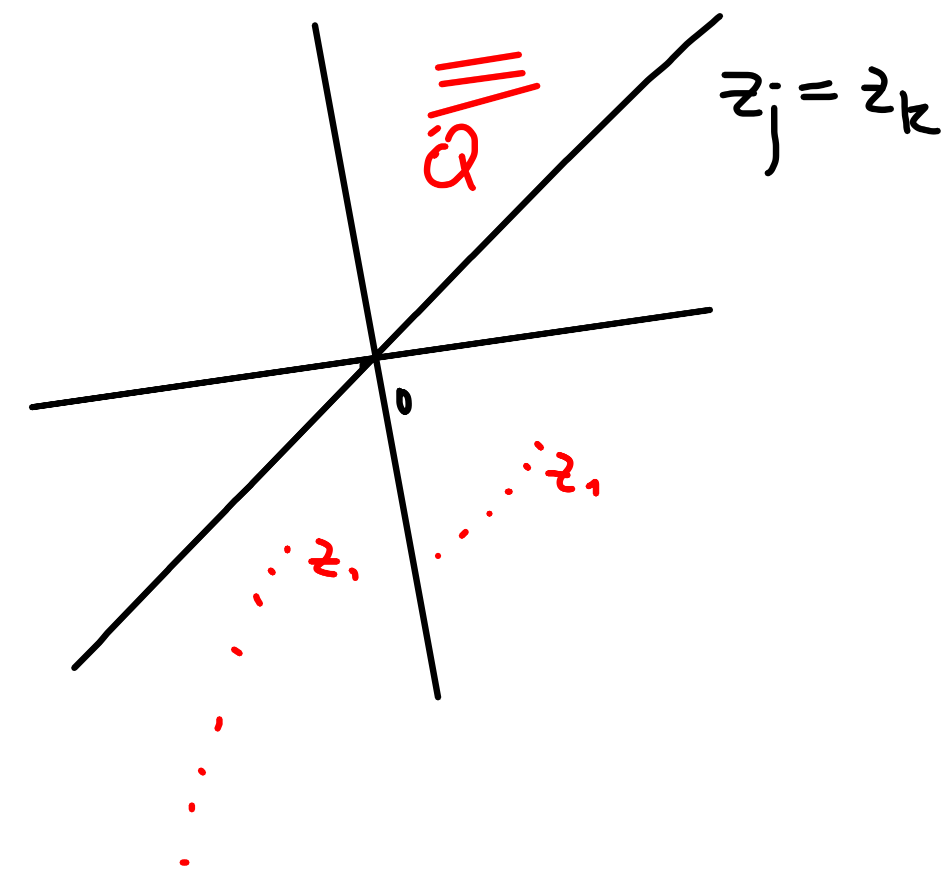


Satz. Für jedes $N \in \mathbb{N}$, für jede Massenverteilung $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^N$ und für jedes $\omega > 0$ gibt es Zentralkonfigurationen.

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $a > 0$ die Urbildmenge $K := u^{-1}([0,a]) \subseteq Q$ kompakt ist (also u eigentlich). Wählt man dann $a > \inf(u) \geq 0$, so nimmt $u|K$ nach Weierstraß ihr Infimum in $z_0 \in K \subseteq Q$ an. Es ist also $u(z_0) \leq a$ und $u(z_0) \leq u(z)$, für alle $z \in K$ und für $z \notin K$ ist so-wieso $u(z) > a$. Damit ist z_0 ein absolutes Minimum von u und damit ein kritischer Punkt von u und damit auch von W.

Erinnere, dass

$$Q = \{ z \in \mathbb{C}^N : z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k \}$$



1. Fall. Sei $(z^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Q mit

$$\min\{ |z_j^\nu - z_k^\nu| : 1 \le j < k \le N \} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

Dann gilt $-V(z^\nu) \longrightarrow \infty$, also auch $u(z^\nu) \to \infty$.

2. Fall: Sei (z^ν) Folge in Q, mit $(|z^\nu|^2) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sum_{j=1}^{N} m_j |z_j^\nu|^2 \geq \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\min_{j=1}^{N}(m_j)}_{>0} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} |z_j^\nu|^2}_{= |z^\nu|^2 \to \infty} \longrightarrow \infty$$

$\Rightarrow \quad R(z^\nu) \to \infty \quad \Rightarrow \quad U(z^\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty.$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$K_\varepsilon := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \|z\| \leq \frac{1}{\varepsilon},\ \min_{1 \leq j < k \leq N} |z_j - z_k| \geq \varepsilon \right\}$$

abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
Und für $\varepsilon > 0$ klein genug liegt nach (1) und (2)

$$K := u^{-1}([0,a]) \subseteq K_\varepsilon$$

Da K abgeschlossen ist, ist auch K kompakt.

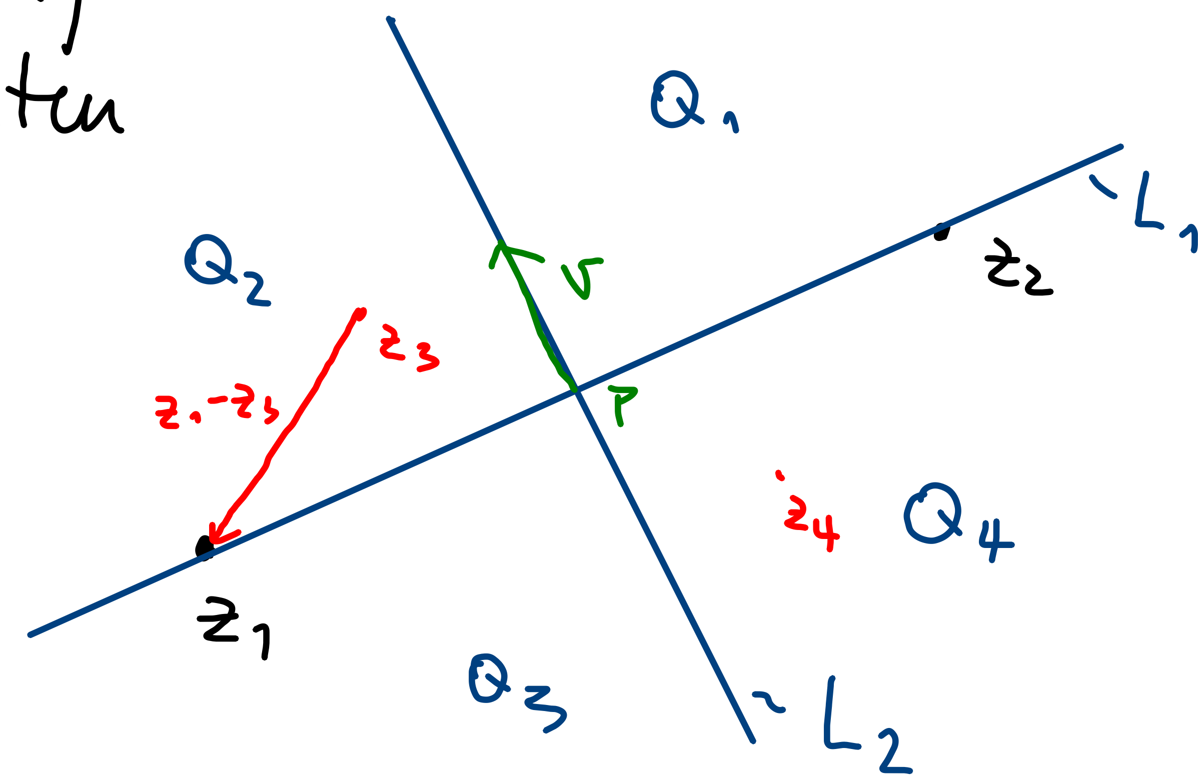
$\boxed{//}$

Kommentar. Dieses Argument liefert nur ein abstraktes Existenzresultat. Man möchte jetzt natürlich gerne wissen, wie ZF'en in $\mathbb{C}$ liegen. Dabei hilft:

$= (z_1, z_2, \dots, z_N)$

Satz (C. Conley): Sei $N \geq 3$, $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}_+$, $\omega > 0$ und $z \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$ eine ZK. Sei $L_1 \subseteq \mathbb{C}$ die Verbindungsgerade von z_1 und z_2 sowie $L_2 \subseteq \mathbb{C}$ die Mittelsenkrechte auf der Strecke $[z_1, z_2] = \{(1-t)z_1 + tz_2 : t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$. Seien schließlich $Q_1, \dots, Q_4$ die Zus.-hgs.-komponenten (Quadranten) von $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$.

Dann gilt: Liegen die Punkte $z_j \in \mathbb{C}$ $(j = 3, \dots, N)$ allesamt in einem Paar (schräg) gegen-



überliegenden abgeschlossenen Quadranten $\overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_4$, so müssen sie alle auf $L_1 \cup L_2$ liegen.

Beweis. Sei $p \in L_1$ der Mittelpunkt zwischen z_1 und z_2 und $v \in \mathbb{C}^*$, so dass

$$L_2 = p + \mathbb{R} v$$

ist. Es folgt

$$\langle z_2 - z_1, v \rangle = 0,$$

wo $\langle -,- \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ sei,

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z\overline{w})$$

Es folgt für alle $j = 3, \ldots, N$

$$\langle z_2 - z_j, v \rangle = \langle z_2 - z_1 + z_1 - z_j, v \rangle = \langle z_2 - z_1, v \rangle + \langle z_1 - z_j, v \rangle$$
$$= \langle z_1 - z_j, v \rangle .$$

Da $z \in Q$ ZK ist, folgt außerdem

$$\left\langle \frac{1}{m_2} D_{z_2} V(z) - \frac{1}{m_1} D_{z_1} V(z), v \right\rangle$$

$$\overset{ZK}{=} \left\langle \frac{1}{2}\omega^2 z_2 - \frac{1}{2}\omega^2 z_1, v \right\rangle = \frac{1}{2}\omega^2 \langle z_2 - z_1, v \rangle = 0 .$$

Also:

$$0 = \left\langle m_1 \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|^3} + \sum_{j=3}^{N} m_j \frac{z_2 - z_j}{|z_2 - z_j|^3}, v \right\rangle$$

$$- \left\langle m_2 \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^3} + \sum_{j=3}^{N} m_j \frac{z_1 - z_j}{|z_1 - z_j|^3}, v \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=3}^{N} m_j \left(\frac{1}{|z_2 - z_j|^3} - \frac{1}{|z_1 - z_j|^3} \right) \langle z_1 - z_j, v \rangle$$

Nun ist

$$\frac{1}{|z_2 - z_j|^3} - \frac{1}{|z_1 - z_j|^3} \geq 0 \iff |z_2 - z_j| \leq |z_1 - z_j|$$

$$\iff z_j \in \overline{Q_1} \cup \overline{Q_4}$$

Andererseits ist

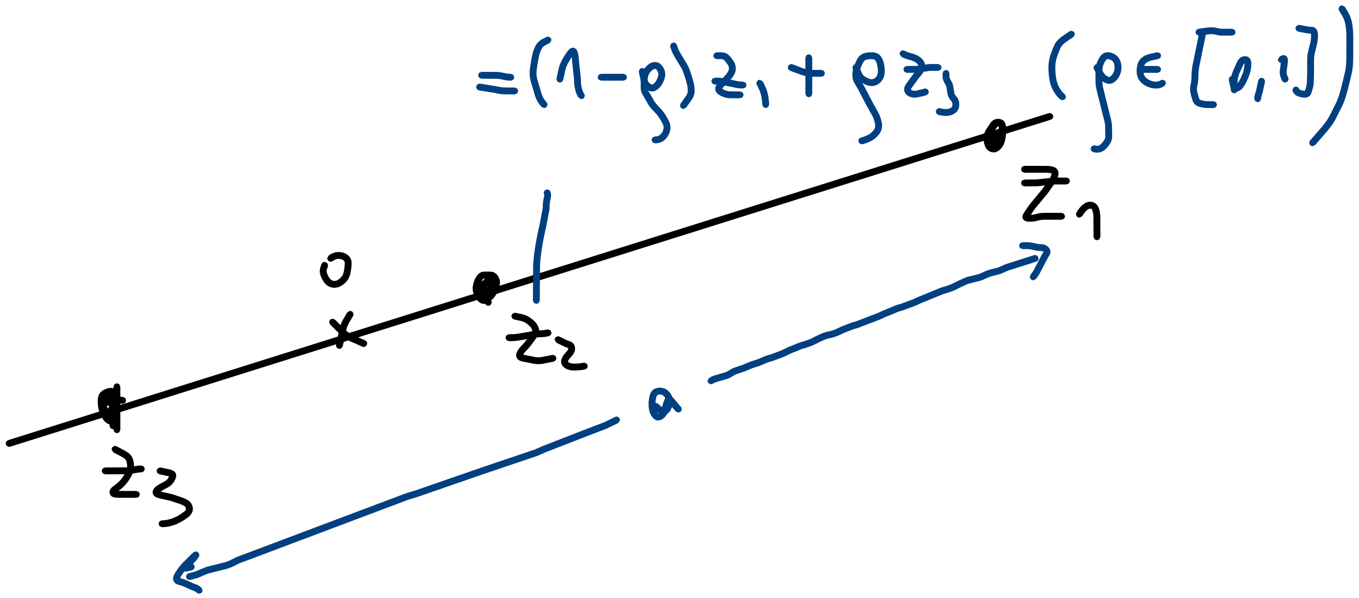
$$\langle z_1 - z_j, v \rangle \geq 0 \iff z_j \in \overline{Q_3} \cup \overline{Q_4}$$

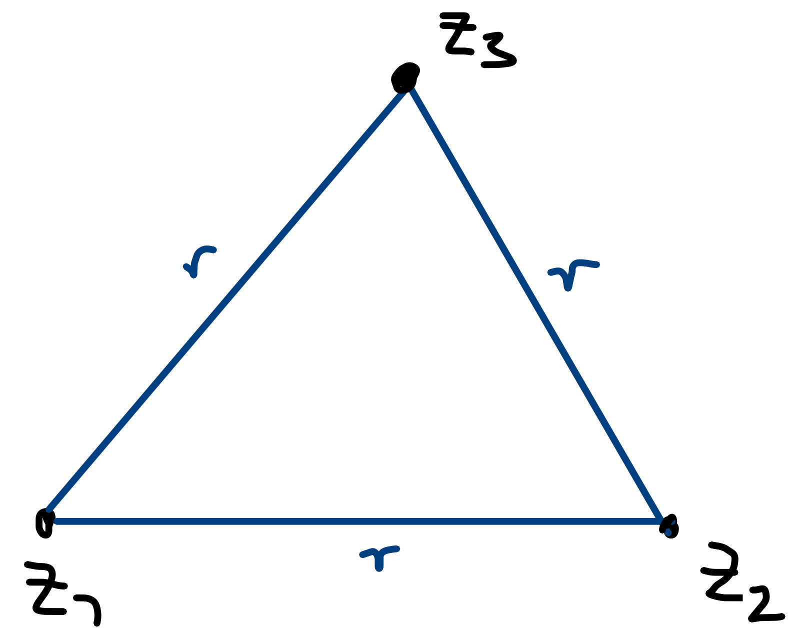
Also gilt: liegen alle $z_j \in \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_3$, so sind alle Summanden nicht-negativ, liegen sie alle in $\overline{Q}_2 \cup \overline{Q}_4$, so sind alle nicht-positiv. In beiden Fällen müssen sie deshalb <u>alle</u> Null sein, d.h. z_j liegt auf L_1 oder L_2, für alle $j = 3, \dots, N$,

$$L_1 = \{ z \in \mathbb{C} : \langle z, v \rangle = 0 \},$$
$$L_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z_2 - z| \}.$$

∎

Korollar. Für $N = 3$ gibt es höchstens eine kollineare ZK oder eine ZK, die ein gleichseitiges Dreieck bildet.





Beweis. Klar ist, dass eine kollineare Konfiguration Conleys Satz nicht widerspricht. Seien (z_1, z_2, z_3) nicht-kollinear. Da z_3 dann auf der Mittelsenkrechten von $[z_1, z_2]$ liegt, ist

$$|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| .$$

Ebenso ist aber auch

$$|z_2 - z_1| = |z_2 - z_3| ,$$

also insgesamt

$$|z_3 - z_1| = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|.$$

$\square$

Frage: Sind diese Konfigurationen nun Lösungen und wenn ja, für welche Parameter?